

Дискретное преобразование Фурье

- Преобразование Карунена-Лоева выполняются применительно к конкретной выборке и требует больших вычислительных затрат.
- Если разложить по некоторому **заданному** базису, то можно снизить затраты, правда снизив требования к разложению.

Непрерывное преобразование Фурье



Жан Батист Жозеф Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier) 1768-1830, Париж, французский математик и физик.

Прямое преобразование

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j 2 \pi f t) dt \equiv \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Обратное преобразование

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j 2 \pi f t) df \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$$

Одномерное ДПФ

$x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ – вектор исходных измерений.

ДПФ определяется следующим образом:

$$y(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} kn\right)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\exp\{\alpha\} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha), \quad i - \text{мнимая единица.}$$

Обратное преобразование есть:

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} y(k) \cdot \exp\left(i \frac{2\pi}{N} kn\right)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

Представление базисных векторов

Определим

$$W_N = \exp\left(-i \frac{2\pi}{N}\right).$$

Тогда

$$\exp\left(-i \frac{2\pi}{N} kn\right) = W_N^{kn}.$$

Пусть

$$y = W^H x,$$

тогда

$$x = Wy,$$

Представление базисных векторов

$$W^H = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

Утверждается, что W – унитарная симметрическая матрица. Пусть W^* – сопряженная матрица: $W^* = W^H = W^{-1}$. Тогда базисные вектора – это столбцы матрицы W .

Таким образом, имеет место разложение $x = \sum_{i=0}^{N-1} y(i) \cdot w_i$ по базису $w_0, w_1, \dots, w_{N-1}$ векторов-столбцов матрицы W .

Пример

$$N = 4 \quad \rightarrow \quad W_N = \exp\left(-i \frac{2\pi}{N}\right)$$

$$W_4 = \exp\left(-i \frac{2\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - i \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -i$$

$$W_4^2 = \exp(-i \cdot \pi) = \cos(-\pi) - i \cdot \sin(-\pi) = -1$$

$$W_4^3 = \exp\left(-i \frac{2\pi}{4} \cdot 3\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = i$$

$$W_4^4 = \exp(-i \cdot 2\pi) = 1$$

Базисные вектора

$$W^H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$
$$w_0 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \quad w_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

$W = (w_0, w_1, w_2, w_3)$ - матрица из базисных векторов

$$x = y_0 w_0 + y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3 = \sum_{j=0}^3 y_j w_j - \text{разложение}$$

ДПФ – разложение по базисным последовательностям

$x(n)$ – последовательность,

$h_k(n)$ – множество базисных последовательностей.

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} y(k) \cdot h_k(n)$$

$$h_k(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n\right), & n = 1, \dots, N - 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\left(h_k(n), h_l(n)\right) = \sum_n h_k(n) \cdot h_l(n) = \delta_{kl} \text{ – ортонормальные последовательности}$$

Двумерное ДПФ

Пусть $X(m, n)$, $m, n = 0, 1, \dots, N-1$ – двумерные измерения. Тогда двумерное ДПФ есть:

$$Y(k, l) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X(m, n) W_N^{k \times m} W_N^{l \times n} .$$

Обратное преобразование:

$$X(m, n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} Y(k, l) W_N^{-k \times m} W_N^{-l \times n} .$$

Данную запись компактно можно переписать в следующем виде:

$$Y = W^H X W^H, \quad X = W Y W .$$

Дискретное косинусное преобразование

$$y(k) = \alpha(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k) \cdot y(k) \cdot \cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\alpha(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}}, & k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$y = C^T x,$$

C – ортогональная матрица, $C^{-1} = C^T$.

$$C(n, k) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad k = 0, \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

$$C(n, k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right), \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Двумерное косинусное преобразование

$X(m, n)$, $m, n = 0, 1, \dots, N-1$ – двумерные измерения

$$Y = C^T X C$$

$$X = C Y C^T$$

Дискретное синусное преобразование

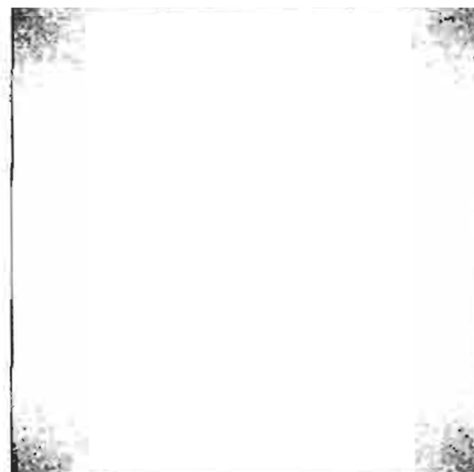
$$y = S^T x$$

$$S(k, n) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \left(\frac{\pi(n+1)(k+1)}{N+1} \right), \quad k, n = 0, 1, \dots, N-1.$$

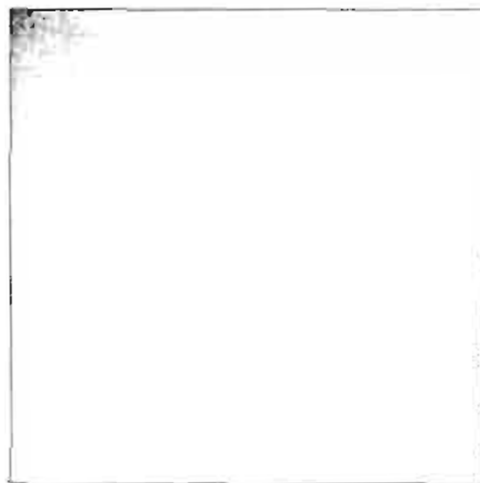
Пример ДПФ, ДКП, ДСП преобразований



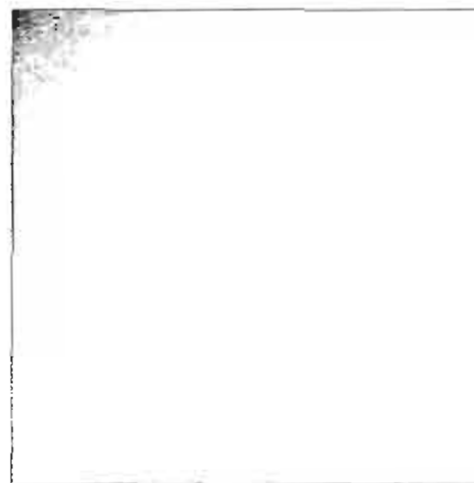
Исходное изображение



Коэффициенты ДПФ

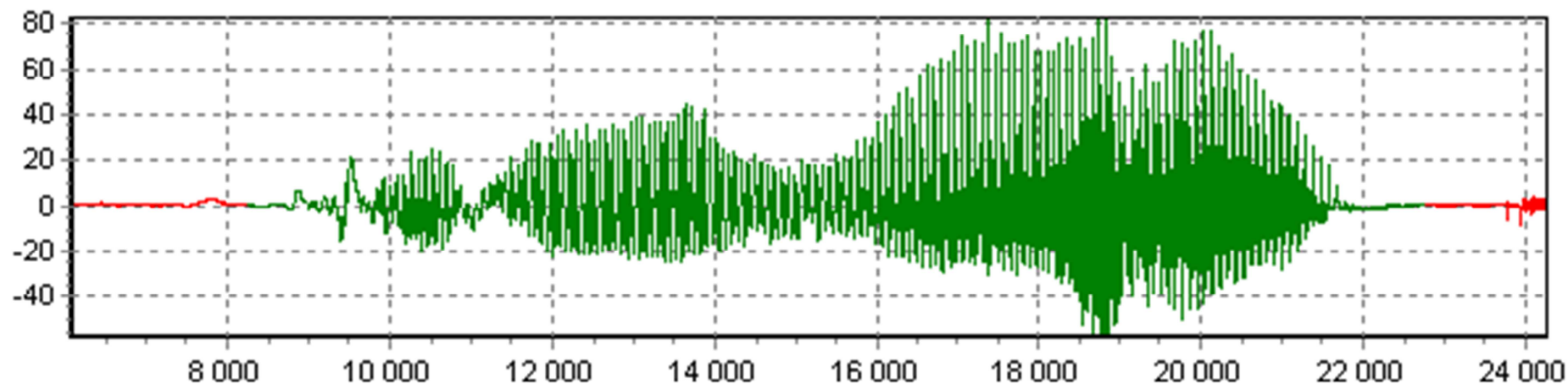


Коэффициенты ДСП



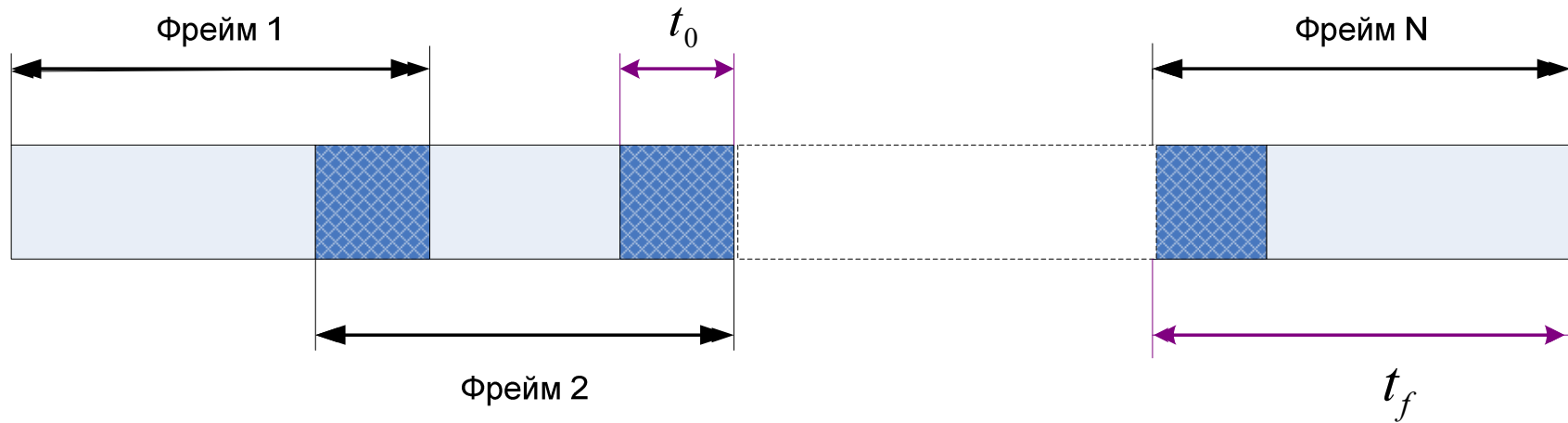
Коэффициенты ДКП

Задача сравнения речевых команд



Звуковой сигнал с микрофона для слова «привет»

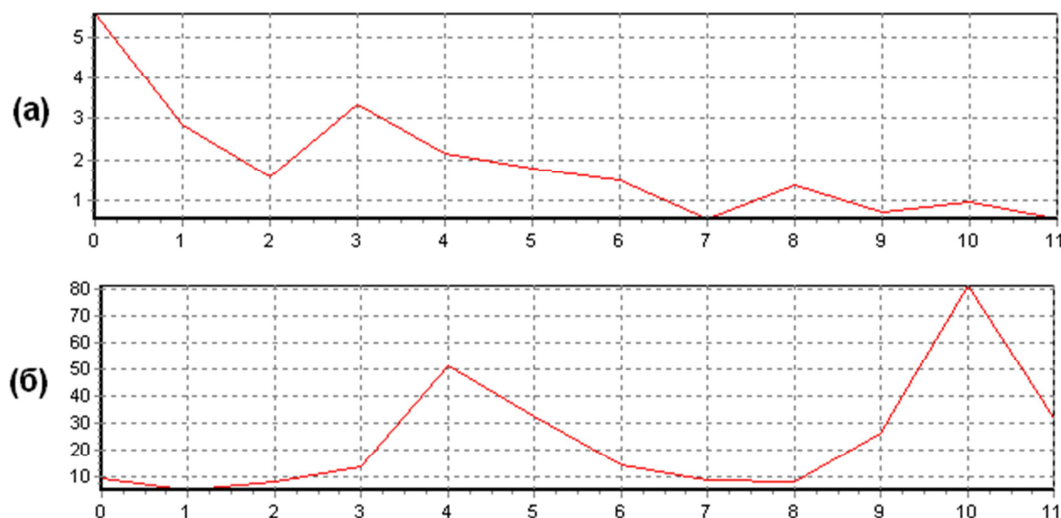
Разделение сигнала на фреймы с перекрытием



Спектральные коэффициенты

В качестве вектора признаков для отдельного фрейма выбираются коэффициенты ДПФ для сигнала $x_k(n)$, $n = 0, \dots, t_f - 1$ этого фрейма:

$$y_k(m) = \frac{1}{\sqrt{t_f}} \sum_{n=0}^{t_f-1} x_k(n) \exp(-i \frac{2\pi}{t_f} mn), \quad m = 0, \dots, t_f.$$



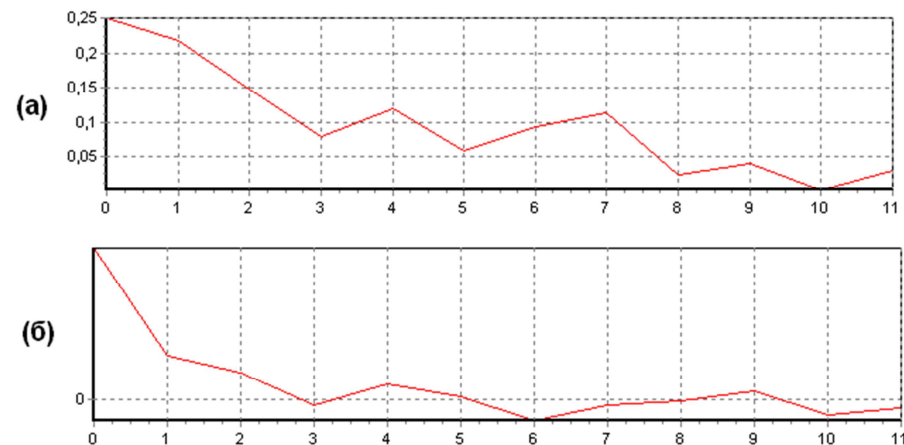
Модули спектральных коэффициентов для (а) 1-ого и (б) 30-ого фрейма

Кепстральные коэффициенты

Второй вариант признакового описания фрейма – с помощью кепстральных коэффициентов, вычисляемых по формуле:

$$y_k(n) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{t_f} \sum_{l=0}^{t_f-1} \exp(i \frac{2\pi l n}{t_f}) \ln \left\{ \left| \sum_{j=0}^{t_f-1} x_k(j) \exp(-i \frac{2\pi l j}{t_f}) \right| + 1 \right\} \right],$$

$$n = 0, \dots, t_f.$$



Кепстральные коэффициенты для (а) 1-ого и (б) 30-ого фрейма.

Метрика в пространстве признаков

Расстояние между i -ым и j -ым фреймами, описываемых векторами признаков

$$\vec{y}_i = (y_i(1), \dots, y_i(12))$$

и

$$\vec{y}_j = (y_j(1), \dots, y_j(12))$$

соответственно, определяется как обычное Евклидово расстояние:

$$d(i, j) = \sum_{k=1}^{12} (y_i(k) - y_j(k))^2.$$